105年公務人員特種考試司法人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

代號：60960

全一張
（正面）

考 試 別：國家安全情報人員
等　　別：三等考試
類 科 組：數理組
科　　目：線性代數
考試時間：2 小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：㈠禁止使用電子計算器。
㈡不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、設齊次線性方程組（homogeneous linear system）

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} + 2x_4 + 5x_5 &= 0 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 - 8x_5 &= 0 \\ - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

㈠利用此線性方程組的增廣矩陣（augmented matrix），以高斯喬登消去法（Gauss Jordan elimination method）簡化至簡列梯形形式（reduced row-echelon form），求此線性方程組的一般解集合空間（solution space）。（15 分）

㈡求此解集合空間的一組基底及維度（dimension）。（5 分）

二、設

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

㈠求矩陣 P 使得 $P^{-1}AP$ 為對角矩陣，並寫出此對角矩陣。（10 分）

㈡利用㈠，以相似變換方法（similarity transformation method）求矩陣 A^{11}。（10 分）

三、令 $T: P_2 \rightarrow R_3$ 為一函數，其定義為

$$T(p(x)) = (p(0), p(2), p(1))$$

㈠證明 T 是線性變換函數（linear transformation）。（5 分）

㈡證明 T 是一對一函數（one-to-one）。（5 分）

㈢試求 $T^{-1}(1,2,3)$？（5 分）

㈣試求 $T(1-2x)$？（5 分）

（請接背面）

105年公務人員特種考試司法人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

代號：60960

全一張（背面）

考試別：國家安全情報人員
等別：三等考試
類科組：數理組
科目：線性代數

四、設線性方程組如下：

$$Ax = b$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

㈠試求最小平方解（least squares solution）。（10 分）
㈡試求b在 A 行空間（column space）的正交投影向量（orthogonal projection）。（5 分）
㈢試求最小平方誤差值（least squares error）$\| b - Ax \|$。（5 分）

五、令向量空間$\mathbb{R}^3$具有如下內積（inner product）

$$< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} > = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + u_3 v_3$$

其中 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$為空間$\mathbb{R}^3$之任意兩向量。
㈠證明 $\boldsymbol{x} = (1,1,0)$, $\boldsymbol{y} = (1,0,1)$, and $\mathbf{z} = (0,1,1)$為$\mathbb{R}^3$一組基底。（10 分）
㈡使用格拉姆-施密特正交化法（Gram-Schmidt orthogonalization）轉換 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mathbf{z}$ 為標準正交基底（orthonormal basis）。（10 分）